FISICA GENERALE T-2

Federico Fabiano

June 6, 2018

Esercizi tutor - Parte II

Campi magnetici generati da correnti, forza magnetica, legge di Ampere

Problema 1: Tre fili paralleli

Soluzione:

(a) Ogni filo produce un campo magnetico $\boldsymbol{B} = \mu_0 i_0 / 2\pi r \hat{\theta}$, dove r è la distanza dal filo. Le linee del campo sono dirette in senso antiorario perchè le correnti sono tutte verso l'alto. Se mettiamo l'origine dell'asse x in corrispondenza del filo 1, gli altri due fili sono nel punto $x = d$ e $x = 2d$ rispettivamente. Il campo magnetico risultante sul piano xz è diretto lungo $\hat{y}$ e vale in un punto di coordinate (x,z):

$$\boldsymbol{B}(x) = \frac{\mu_0 i_0}{2\pi}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-d} + \frac{1}{x-2d}\right)\hat{y}$$

(b) Disegnando le linee circolari prodotte da ciascun filo e sommando poi i campi dei tre fili..

(c) Le correnti sono tutte nello stesso verso, le forze sono attrattive. La forza per u.d.l. su ciascun filo è data dal prodotto vettore di $i_0\hat{z}$ per il campo prodotto dagli altri due fili in quel punto. Si trova:

$$\boldsymbol{f}_1 = i_0\hat{z} \times [B_2(x_1) + B_3(x_1)]\,\hat{y} = \frac{\mu_0 i_0^2}{2\pi}\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{2d}\right)\hat{x} = \frac{3\mu_0 i_0^2}{4\pi d}\hat{x}$$

$$\boldsymbol{f}_2 = 0 \qquad \boldsymbol{f}_3 = -\frac{3\mu_0 i_0^2}{4\pi d}\hat{x}$$

(d) Cambia il segno del contributo del secondo filo nell'espressione del campo (il secondo termine nella parentesi al punto a) e in quella delle forze, che diventano repulsive e diminuiscono in intensità.

$$\boldsymbol{f}_3 = -\frac{\mu_0 i_0^2}{4\pi d}\hat{x} \qquad \boldsymbol{f}_2 = 0 \qquad \boldsymbol{f}_3 = \frac{\mu_0 i_0^2}{4\pi d}\hat{x}$$

Problema 2: Disco carico rotante

Soluzione:

(a) Il campo prodotto da una spira circolare al suo centro si trova integrando il contributo di ogni singolo elemento dl della circonferenza dato dalla legge di Laplace:

$$\boldsymbol{B} = \int_C dB = \int_C \frac{\mu_0}{4\pi r^2} i dl \hat{\theta} \times -\hat{r} = \int_0^{2\pi r} \frac{\mu_0 i}{4\pi r^2} \hat{z} dl = \frac{\mu_0 i}{2r} \hat{z}$$

(b) La carica totale dell'anello è $\sigma 2\pi r dr$, e compie un giro nel tempo T. Di conseguenza la corrente infinitesima vale: $di_s(r) = \sigma 2\pi r/T dr$. Il campo $dB_s(r)$ prodotto da questa spira infinitesima vale:

$$dB_s(r) = \frac{\mu_0 di_s(r)}{2r} \hat{z} = \frac{\mu_0 \pi \sigma}{T} dr \hat{z}$$

(c) Integrando l'espressione precedente su r si ottiene $\boldsymbol{B} = \int dB_s(r) = \frac{\mu_0 \pi \sigma R}{T} \hat{z}$

Problema 3: Tre piani percorsi da corrente

Soluzione:

(a) I piani sono infiniti, quindi il campo non varia spostandosi sul piano. L'unica dipendenza del campo può essere rispetto a x. Una corrente lungo z produce un campo che sta sul piano xy e si avvolge in circonferenze attorno al filo stesso. Sommando il contributo di tanti fili, le componenti dirette in direzione perpendicolare al piano (cioè lungo $\hat{x}$) tendono ad annullarsi, producendo delle linee di campo in direzione $\hat{y}$.

(b) Considerando un percorso rettangolare sul piano xy che non interseca nessuno dei piani, come il percorso A in figura 1, per il teorema di Ampere abbiamo che il campo non varia con x nelle regioni esterne o tra i piani, ma varia solo in corrispondenza con i piani. Il campo di un piano, considerando un circuito come il circuito C in figura 1, vale $B_i = \mu_0 n_i i/2$, ed è diretto come in figura. Sommando i campi dei singoli piani si trova:

$$\begin{aligned}
x < x_1 \qquad & \boldsymbol{B} = -\frac{\mu_0 ni}{2} \hat{y} \\
x_1 < x < x_2 \qquad & \boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 ni}{2} \hat{y} \\
x_2 < x < x_3 \qquad & \boldsymbol{B} = -\frac{\mu_0 ni}{2} \hat{y} \\
x > x_3 \qquad & \boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 ni}{2} \hat{y}
\end{aligned}$$

(c) Le tre forze sono nulle. Dato che il campo prodotto da un piano non dipende dalla distanza, per i due piani esterni la forza repulsiva del piano centrale è bilanciata dalla forza attrattiva dell'altro piano esterno. Sul piano centrale la forza è nulla per simmetria (le due forze repulsive si bilanciano a vicenda).

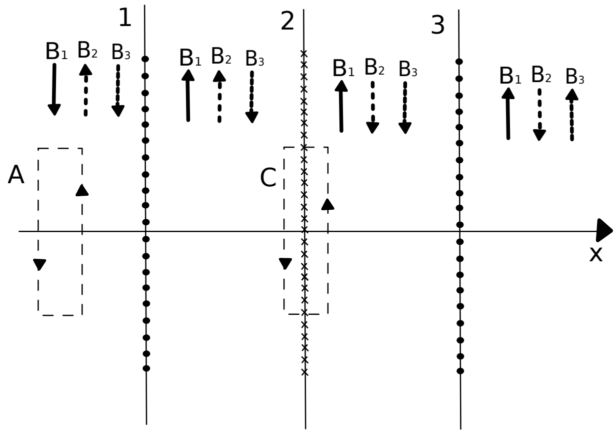

Figure 1

Problema 4: Filo e spira #2

Soluzione:

(a) I due lati orizzontali sperimentano una forza netta nulla, mentre i sui due lati verticali agiscono forze di ugual modulo. La forza sul lato sinistro è attrattiva, mentre quella sul lato destro è repulsiva: la componente x delle due forze si annulla, ma la componente y no. La forza risultante è: $\boldsymbol{F} = 2 \cdot 1/2 \cdot a i_s \mu_0 i_f/(2\pi a)\hat{y} = a i_s \mu_0 i_f/(2\pi a)\hat{y}$.

(b) Le forze sui due lati orizzontali danno un contributo nullo al momento rispetto a S, essendo esterne al piano xy. Le forze sui due lati verticali danno un contributo nello stesso verso. Si ha:

$$M_S = \Sigma_i r_{i\perp} F_i = 2 \cdot \sqrt{3}/2 \cdot a/2 \cdot \frac{a i_s \mu_0 i_f}{2\pi a} = \frac{\sqrt{3}\mu_0 a^2 i_s i_f}{4\pi a}$$

Induzione magnetica, legge di Faraday

Problema 5: Filo e spira #3

Soluzione:

(a) Al tempo $t = 0$ la corrente nel filo è i_0, diretta verso l'alto. Quindi il campo ha modulo $B = \mu_0 i_0 / 2\pi r$, dove r è la distanza dal filo e direzione perpendicolare al piano in cui giace la spira.

(b) Il flusso del campo attraverso la spira è dato da:

$$\Phi(t) = \frac{\mu_0 i_0}{2\pi} \int_0^b db \int_d^{d+a} \frac{1}{r} dr = \frac{\mu_0 i_0 b}{2\pi} \log\left(\frac{d+a}{d}\right) \cos(\omega t)$$

Perciò la corrente nella spira è data da:

$$i_s(t) = \frac{1}{R}\frac{d\Phi(t)}{dt} = \frac{\mu_0 i_0 b\omega}{2\pi R} \log\left(\frac{d+a}{d}\right) \sin(\omega t)$$

Il verso positivo è quello in cui il lato parallelo più vicino al filo ha una corrente che scorre nella direzione positiva di $\hat{z}$.

(c) Le forze sui lati perpendicolari al filo si annullano a vicenda. La forza risultante sugli altri due lati è (assumiamo che la spira stia nel piano yz):

$$\boldsymbol{F} = -b i_s(t) \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi d} + b i_s(t) \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi(d+a)} \hat{y} = -\frac{\mu_0^2 i_0^2 b^2 a\omega}{2\pi^2 R d(d+a)} \log\left(\frac{d+a}{d}\right) \sin(2\omega t)\hat{y}$$

Problema 6: Induzione tra due solenoidi

Soluzione:

(a) Sia $n_1 = N_1/L_1$ e $n_2 = N_2/L_2$. Al tempo $t = 0$ il campo vale: $\boldsymbol{B} = \mu_0 n_1 i_0 \hat{z}$.

(b) La densità di energia magnetica è $u_m = B^2/2\mu_0$, quindi l'energia magnetica totale contenuta nel solenoide a $t = 0$ è: $U_m = \pi R_1^2 L_1 (\mu_0 n_1 i_0)^2 / 2\mu_0 = \pi R_1^2 L_1 \mu_0 n_1^2 i_0^2 / 2$.

(c) Il flusso attraverso una spira è $\Phi_s = \pi R_2^2 \mu_0 n_1 i_0$, quello totale è quindi $\Phi_S = N_2 \pi R_2^2 \mu_0 n_1 i_0$.

(d) $\epsilon = d\Phi_S/dt = N_2 \pi R_2^2 \mu_0 n_1 i_1$ e $i_2 = \epsilon / R_2$. La corrente indotta percorre le spire in senso orario.

Problema 7: Spira che routa in campo magnetico uniforme

Soluzione:

(a) Ad entrambi i tempi il flusso vale $\Phi = a^2 B_0$ in valore assoluto, ma il segno cambia. Se definisco come positivo il flusso a $t = 0$, al tempo $t = 1\,s$ avrò $\Phi = -a^2 B_0$.

(b) Con la convenzione sul segno appena definita, il flusso vale $\Phi(\theta) = a^2 B_0 \cos\theta$.

(c) Con la spira in rotazione, $\theta(t) = 2\pi t/T = \omega t$. Quindi $\Phi(t) = \Phi(\theta(t)) = a^2 B_0 \cos(\omega t)$.

(d) $i(t) = \epsilon(t)/R = \omega a^2 B_0 \sin(\omega t)/R$. Il verso positivo è quello antiorario visto dalla direzione positiva dell'asse y. La corrente inverte il senso dopo mezzo giro.

(e) I due lati orizzontali non contribuiscono. I lati verticali danno lo stesso contributo e trovo:

$$M_z = -2 \cdot i(t) B_0 \sin(\omega t) = -2\omega a^2 B_0^2 \sin^2(\omega t)/R$$

Il momento è diretto sempre nello stesso verso perchè tende sempre a frenare la spira in rotazione. In caso contrario avrei un paradosso energetico.